



COMPLX

Advanced Engineering for Real Solutions



COMPLX

CURSO BÁSICO DE ELEMENTOS FINITOS

1.2 CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL



SIGUIENTE PASO: CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

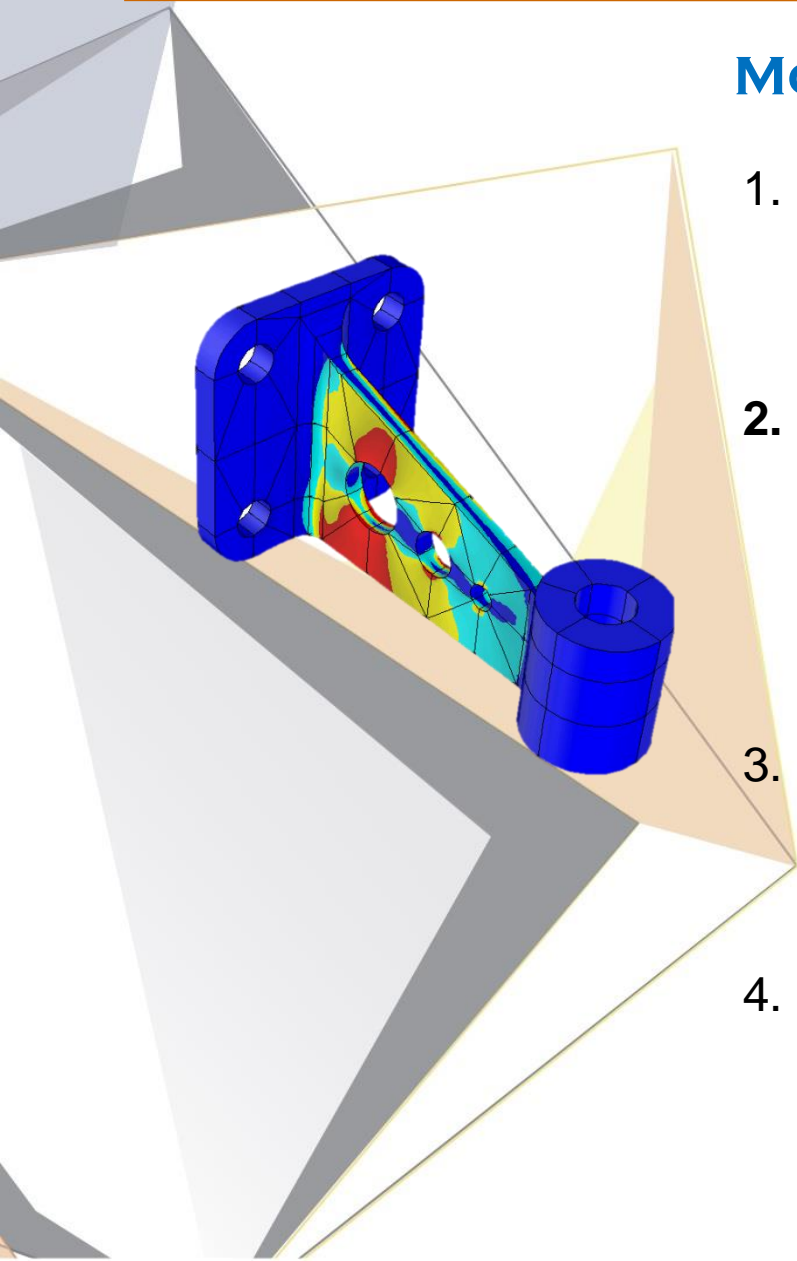


Álgebra
matricial y
solución de
ecuaciones



MÓDULO MEF 1

1. Introducción al Método de Elementos Finitos (MEF)
 1. Definición
 2. Historia
2. **Conceptos básicos de álgebra lineal**
 1. **Sistemas de ecuaciones simultáneas y matrices**
 2. **Tipos especiales de matrices**
 3. **Operaciones con matrices**
 4. Introducción a Scilab
3. Matriz de rigidez del elemento barra
 1. Definición del elemento barra
 2. Derivación de la matriz de rigidez
 3. Ensamble de matriz de rigidez
4. Análisis de estructuras reticulares utilizando barras bidimensionales




Instalación de Scilab

Se recomienda instalar la última versión estable. En este caso la 5.5.2.

1. En la página principal, seleccionar la liga “Download Scilab”
2. Completar el formato correspondiente a estudiante o profesional
3. Seleccione y descargue el instalador correspondiente a la versión deseada.

www.scilab.org



Scilab Download Resources Community

Download Scilab
 Scilab 5.5.2 - 64-bit Windows • 129.80 MB
 Other Systems

Open source software for numerical computation

Thanks for downloading Scilab!

You are a professional or an academic?

You are using Scilab within a company or professional organization? Scilab is open source software published by Scilab Enterprises S.A.S which offers a large range of services and support to help you using Scilab.
 Leave us your contact information to help us know better about you. Your email will be kept confidential.

Last Name * First Name *
 Email * Phone
 Company * Country *
☐ Select this checkbox if you want more information on our products & services or to be contacted by Scilab Enterprises.

You are an individual or a student?

Leave us your contact information to help us know better about you. Your email will be kept confidential.

Last Name * First Name *
 Email * Phone
 Company Country *
☐ Select this checkbox if you want more information on our products & services or to be contacted by Scilab Enterprises.

Take some time to visit:

- Our services,
- Our training offer,
- Our support offer,
- Scilab File Exchange,
- Scilab Bug Tracker.

Take some time to check:


- Tutorials & Documentation,
- Mailing Lists,
- Scilab Online Help,
- Scilab File Exchange,
- Scilab Bug Tracker.

Scilab 5.5.2

Released on 04/01/2015
[System Requirements](#) | [Release Notes](#) | [New in Scilab 5.5.2](#)


Scilab is governed by the CeCILL license respecting the rules of distribution of free software. Please read the terms of this license before downloading Scilab. [Read the license](#)

Windows XP, Vista, 7, 8


	+ Scilab 5.5.2 - 32-bit Windows	134.67 MB - Mar 31, 2015
	+ Scilab 5.5.2 - 64-bit Windows	136.11 MB - Mar 31, 2015

The 32-bit release works on all supported Windows OSs; the 64-bit is for Windows 64-bit only, with better performances.

GNU/Linux

	+ Scilab 5.5.2 - 32-bit Linux	199.96 MB - Mar 31, 2015
	+ Scilab 5.5.2 - 64-bit Linux	197.69 MB - Mar 31, 2015

Mac OS X (Intel platforms only)

	+ Scilab 5.5.2 - Mac OS X	145.48 MB - Mar 31, 2015
	+ Scilab 5.5.2 - Mac OS X 10.10	156.49 MB - Apr 02, 2015

For Yosemite, pick the Mac OS X 10.10 version, and install Java 6 (<http://support.apple.com/kb/DL1572>)



SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

La solución de elementos finitos requiere resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, como el mostrado a continuación,

$$2x = y$$

$$2x + 3y = 12$$

Por su simplicidad, el sistema anterior puede ser resuelto a mano, utilizando la técnica de sustitución:

$$\begin{array}{l} 2x = y \\ y + 3y = 12 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 4y = 12 \\ y = 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x = 3 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}$$

**EJEMPLO 1**

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 3x + y = x + 3 & \longrightarrow & 2x + y = 3 \\ x - 2y = y - 2 & \longrightarrow & x - 3y = -2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ -2x + 6y = 4 \\ \hline 7y = 7 \\ y = 1 \end{array}$$

Ordenar variables y
constantes

Multiplicar la
segunda ecuación
por (-2)

$$\begin{array}{l} 2x + 1 = 3 \\ 2x = 2 \\ x = 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x - 2y = y - 2 \\ 1 - 2(1) = 1 - 2 \\ 1 - 2 = -1 \\ -1 = -1 \end{array}$$





SISTEMAS DE ECUACIONES → REPRESENTACIÓN MATRICIAL

Una manera eficiente de escribir un sistema de ecuaciones es utilizando matrices. Por ejemplo, el sistema

$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 53$$

$$3x_1 - 1x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 4x_5 = 65$$

$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 1x_4 - 5x_5 = 25$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1x_4 - 9x_5 = -7$$

$$2x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 7x_5 = -30$$

Puede reescribirse en forma matricial como **Ax=b**:

Arreglo de
coeficientes **[A]**

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 7 & 9 & -4 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 6 & 1 & -9 \\ 2 & 6 & -9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 \\ 65 \\ 25 \\ -7 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Arreglo de
incógnitas
[x]

Arreglo de valores
conocidos
[b]



INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES

DEFINICIONES:

- Una matriz es un arreglo de números ordenados, variables o constantes, en filas horizontales y columnas verticales encerrados entre paréntesis rectangulares.
- Elemento matricial, es cada valor –constante o variable- en una matriz.
- Dimensión, es el número de filas por el número de columnas de una matriz (mxn).
- Un elemento típico en la i-ésima fila y la j-ésima columna de A se identifica como a_{ij} . Por ejemplo, en la primera matriz, $a_{11}=2$ y $a_{32}=8$.

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2. B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$3. C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$



TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Matriz Columna (Vector):

Una matriz con solamente una columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada (m=n):

Una matriz con el mismo número de columnas y renglones.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal:

Matriz donde todos los elementos son cero, a excepción de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz Nula:

Matriz donde todos los elementos son cero.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de la matriz **A** de $m \times n$, escrita como A^T , se obtiene al intercambiar los renglones y columnas en **A**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

Si $A=A^T$, resulta que la matriz **A** es cuadrada y que $a_{ij}=a_{ji}$

Las matrices generadas por FEM son simétricas y en forma de bandas, por lo que utilizando un esquema de almacenaje efectivo, se pueden almacenar matrices de gran tamaño en la memoria de alta velocidad.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 7 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 9 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$



OPERACIONES CON MATRICES

Suma/Resta

Dos matrices se pueden sumar si son de la misma dimensión. La operación se hace elemento por elemento.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Inténtelo con Scilab:

```
-->A=[2 -4; 5 0; 1 -3]  
A =
```

```
2. - 4.  
5.  0.  
1. - 3.
```

```
-->B=[-1 0; -2 1; 3 -3]  
B =
```

```
- 1.  0.  
- 2.  1.  
 3. - 3.
```

```
-->A+B  
ans =
```

```
1. - 4.  
3.  1.  
4. - 6.
```

```
-->A-B  
ans =
```

```
3. - 4.  
7. - 1.  
- 2.  0.
```

OPERACIONES CON MATRICES EN SCILAB

Scilab

File Edit

Scilab

10

★

COMPLX

Advanced Engineering for Real Solutions

TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Matriz Columna (Vector):
Una matriz con solamente una columna:
Multi-matrizada (m x n):
Una matriz con el mismo número de columnas y renglones:
Matriz Diagonal:
Una matriz donde los elementos son cero, o excepción de la diagonal principal:
Matriz Nula:
Una matriz donde los elementos son cero:
 $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10

★

COMPLX

Advanced Engineering for Real Solutions

OPERACIONES CON MATRICES

Suma/Resta:
Dos matrices se pueden sumar si son de la misma dimensión. La operación se hace elemento por elemento.

Intercambio con Scilab:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & 0 & 7 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -2 & 1 & -7 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11

★

COMPLX

Advanced Engineering for Real Solutions

SUMA DE MATRICES CON SCILAB

Suma/Resta:
Dos matrices se pueden sumar si son de la misma dimensión. La operación se hace elemento por elemento.

Intercambio con Scilab:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & 0 & 7 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -2 & 1 & -7 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma/Resta

Dos matrices se pueden sumar si son de la misma dimensión. La operación se hace elemento por elemento.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$



OPERACIONES CON MATRICES (2)

Multiplicación por escalar

Se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar.

$$4 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ 20 & 0 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

Inténtelo con Scilab:

```
-->A  
A =
```

```
2.  - 4.  
5.   0.  
1.  - 3.
```

```
-->4.*A  
ans =
```

```
8.  - 16.  
20.  0.  
4.  - 12.
```



OPERACIONES CON MATRICES (3)

Multiplicación de matrices

La multiplicación matricial no es conmutativa

$$A * B \neq B * A$$

Además, sólo es posible multiplicar matrices si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B:

2 columnas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

2 renglones



MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}; C = A * B$$

Cada elemento C_{ij} será el producto punto de la i -ésima fila de A con la j -ésima columna de B . Así, el elemento C_{21} será el producto punto de la segunda fila de A con la primera columna de B .

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} & A_{11} * B_{12} + A_{12} * B_{22} & A_{11} * B_{13} + A_{12} * B_{23} \\ A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21} & A_{21} * B_{12} + A_{22} * B_{22} & A_{21} * B_{13} + A_{22} * B_{23} \\ A_{31} * B_{11} + A_{32} * B_{21} & A_{31} * B_{12} + A_{32} * B_{22} & A_{31} * B_{13} + A_{32} * B_{23} \end{bmatrix}$$



EJEMPLO 2

Multiplique la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

3 x 2

2 x 3

3 x 3

$$C = \begin{bmatrix} 2*1+3*3=11 & A_{11}*B_{12}+A_{12}*B_{22} & A_{11}*B_{13}+A_{12}*B_{23} \\ A_{21}*B_{11}+A_{22}*B_{21} & A_{21}*B_{12}+A_{22}*B_{22} & A_{21}*B_{13}+A_{22}*B_{23} \\ A_{31}*B_{11}+A_{32}*B_{21} & A_{31}*B_{12}+A_{32}*B_{22} & A_{31}*B_{13}+A_{32}*B_{23} \end{bmatrix}$$



EJEMPLO 2

Multiplique la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

3 x 2

2 x 3

3 x 3

$$C = \begin{bmatrix} 2*1+3*3=11 & \boxed{-4+12=8} & A_{11}*B_{13}+A_{12}*B_{23} \\ A_{21}*B_{11}+A_{22}*B_{21} & A_{21}*B_{12}+A_{22}*B_{22} & A_{21}*B_{13}+A_{22}*B_{23} \\ A_{31}*B_{11}+A_{32}*B_{21} & A_{31}*B_{12}+A_{32}*B_{22} & A_{31}*B_{13}+A_{32}*B_{23} \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 2**

Multiplique la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & -15 \\ 13 & 34 & -30 \\ -12 & -46 & 35 \end{bmatrix}$$

$\frac{3 \times 2}{\quad}$ $\frac{2 \times 3}{\quad}$ $\frac{3 \times 3}{\quad}$



Scilab 5.5.2 Console

File Edit Control Applications ?

Scilab 5.5.2 Console

Variable Browser

Name	Value	Type	Visibility	
ans		3x3	Double	local
D		3x2	Double	local
C		3x2	Double	local
B		3x2	Double	local
A		3x2	Double	local

Command History

```
// -- 14/01/2016 23:25:37 -- //
A=[2 -4; 5 0; 1 -3]
B=[-1 0; -2 1; 3 -3];
C=A+B
D=A-B
[2 3; -5 6; 9 -7]*[1 -2 0; 3 4 5]
[2 3; -5 6; 9 -7]*[1 -2 0; 3 4 -5]
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & -15 \\ 13 & 34 & -30 \\ -12 & -46 & 35 \end{bmatrix}$$



INVERSA DE UNA MATRIZ

La inversa de una matriz es aquella que multiplicada por la matriz original, da como resultado la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz identidad es una matriz (mxn) cuadrada (m=n) que contiene *unos* en los elementos de la diagonal y *ceros* en todos los demás elementos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 4:**

En Scilab, realice la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que el resultado no es totalmente el esperado

```
-->C*inv(C)
ans =
```

```
1. - 4.441D-16
0. 1.
```

```
-->C=[3 -1;-5 2]
C =
```

```
3. - 1.
- 5. 2.
```

```
-->inv(C)
ans =
```

```
2. 1.
5. 3.
```

**EJEMPLO 5:**

En Scilab, compruebe la siguiente operación matricial:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

For a 2x2 matrix

$$A \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

the matrix inverse is

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



MATRICES SINGULARES

No todas las matrices tienen inversa, a aquellas matrices no-invertibles se les denomina matrices singulares. Ejemplos de matrices singulares de 2x2 son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al intentar obtener la inversa de dichas matrices en Scilab obtendremos:

```
-->inv([1 1;1 1])  
      !--error 19  
      Problem is singular  
-->inv([1 -1;-1 1])  
      !--error 19  
      Problem is singular
```



EJEMPLO 6: SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

La solución de un sistema de ecuaciones planteado en forma matricial como $A \cdot X = B$, donde X es un vector columna conteniendo a x_1, x_2, x_3 , se puede obtener de la forma siguiente: $X = \text{inv}(A) \cdot B$.

Ejemplo:

$$-4x_2 + 3x_3 = 29$$

$$3x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 53$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 26$$

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{X} & = & \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 9 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 29 \\ 53 \\ 26 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\rightarrow \mathbf{A} = [0 \ 4 \ 3; 1 \ 9 \ 8; 2 \ 5 \ 3]$$

$$\mathbf{A} =$$

$$\begin{matrix} 0. & 4. & 3. \\ 1. & 9. & 8. \\ 2. & 5. & 3. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1. & 9. & 8. \\ 2. & 5. & 3. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2. & 5. & 3. \end{matrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = [29 \ 53 \ 26]'$$

$$\mathbf{B} =$$

$$\begin{matrix} 29. \\ 53. \\ 26. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 53. \\ 26. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 26. \end{matrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{x} = \text{inv}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{x} =$$

$$\begin{matrix} -6.7692308 \\ 10.538462 \\ -4.3846154 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 10.538462 \\ -4.3846154 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -4.3846154 \end{matrix}$$



EJERCICIO 1: SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 53$$

$$3x_1 - 1x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 4x_5 = 65$$

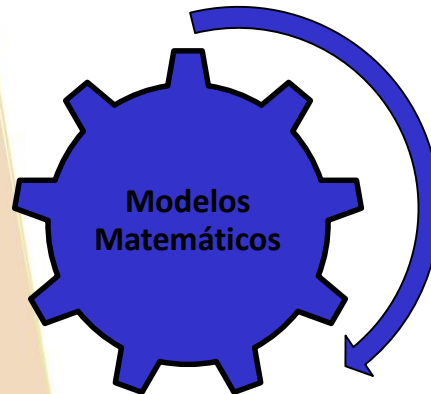
$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 1x_4 - 5x_5 = 25$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1x_4 - 9x_5 = -7$$

$$2x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 7x_5 = -30$$



SIGUIENTE PASO: DERIVACIÓN DE MATRIZ DE RIGIDEZ



Derivación de
Matriz de
Rigidez

AGRADECEMOS TU ATENCIÓN



REFERENCIAS

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2004). *El método de los elementos finitos*. Barcelona: CIMNE.

Carnegie Mellon Curriculum: introduction to CAD and CAE. (2014). Obtenido de Autodesk University: <http://auworkshop.autodesk.com/library/carnegie-mellon-curriculum-introduction-cad-and-cae?language=en>

Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007). (22 de Diciembre de 2014). Recuperado el 17 de Junio de 2015, de Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder: <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>

Gallegos, S., (2006). *Notas del Curso de Elementos Finitos*. Monterrey. ITESM.