COMPLX

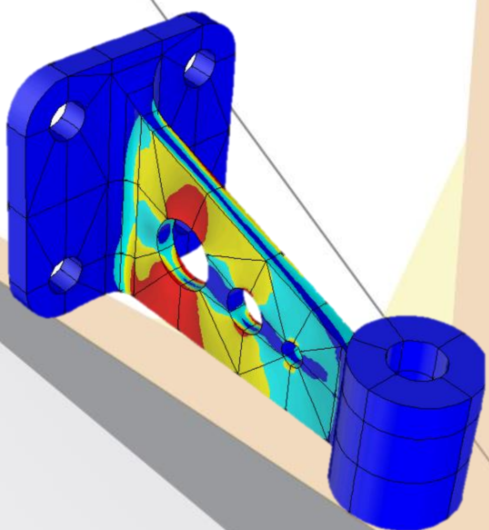
CURSO BÁSICO DE ELEMENTOS FINITOS

1.2 CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Siguiente Paso: Conceptos de Álgebra Lineal

Álgebra matricial y solución de ecuaciones

Módulo MEF 1

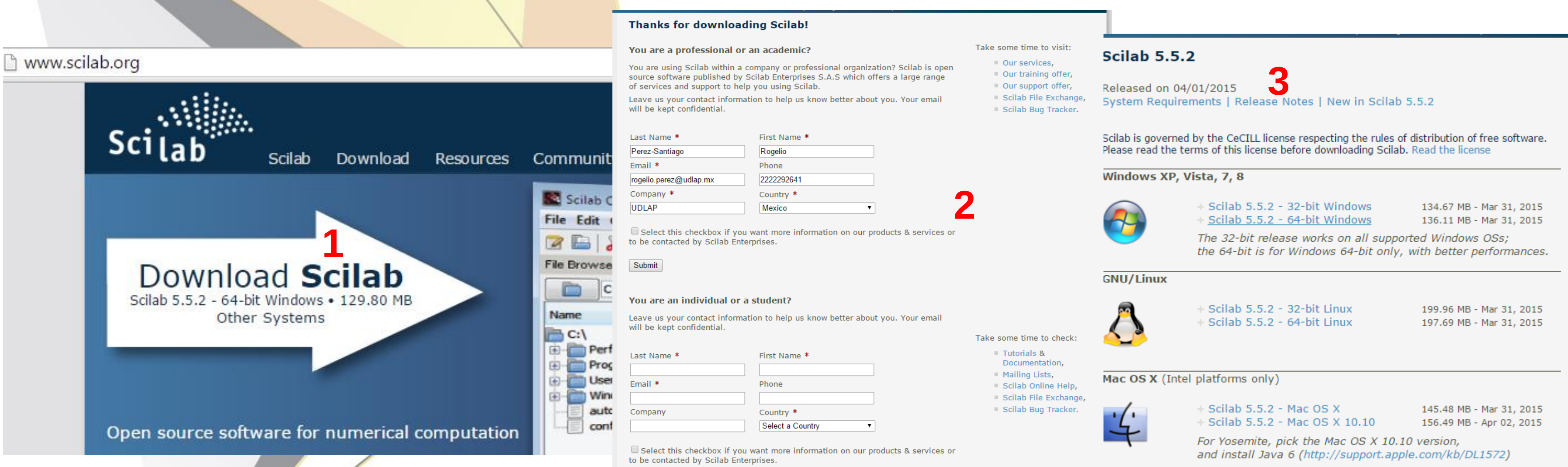


1. Introducción al Método de Elementos Finitos (MEF)
    1. Definición
    2. Historia
2. **Conceptos básicos de álgebra lineal**
    1. **Sistemas de ecuaciones simultáneas y matrices**
    2. **Tipos especiales de matrices**
    3. **Operaciones con matrices**
    4. Introducción a Scilab
3. Matriz de rigidez del elemento barra
    1. Definición del elemento barra
    2. Derivación de la matriz de rigidez
    3. Ensamble de matriz de rigidez
4. Análisis de estructuras reticulares utilizando barras bidimensionales

Instalación de Scilab

Se recomienda instalar la última versión estable. En este caso la 5.5.2.

1. En la página principal, seleccionar la liga "Download Scilab"
2. Completar el formato correspondiente a estudiante o profesional
3. Seleccione y descargue el instalador correspondiente a la versión deseada.



Solución de Ecuaciones Simultáneas

La solución de elementos finitos requiere resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, como el mostrado a continuación,

$$2x = y$$
$$2x + 3y = 12$$

Por su simplicidad, el sistema anterior puede ser resuelto a mano, utilizando la técnica de sustitución:

$$\begin{matrix} 2x = y \\ y + 3y = 12 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 4y = 12 \\ y = 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2x = 3 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{matrix}$$

Ejemplo 1

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + y &= x + 3 \\ x - 2y &= y - 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= -2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -2x + 6y &= 4 \\ \hline 7y &= 7 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Ordenar variables y constantes

Multiplicar la segunda ecuación por (-2)

Sustituir

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 3 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x - 2y &= y - 2 \\ 1 - 2(1) &= 1 - 2 \\ 1 - 2 &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

Sistemas de Ecuaciones → Representación Matricial

Una manera eficiente de escribir un sistema de ecuaciones es utilizando matrices. Por ejemplo, el sistema

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 &= 53 \\
3x_1 - 1x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 4x_5 &= 65 \\
6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 1x_4 - 5x_5 &= 25 \\
-4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1x_4 - 9x_5 &= -7 \\
2x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 7x_5 &= -30
\end{aligned}
$$

Puede reescribirse en forma matricial como **Ax=b**:

$$
\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 7 & 9 & -4 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 6 & 1 & -9 \\ 2 & 6 & -9 & 8 & 7 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 53 \\ 65 \\ 25 \\ -7 \\ -30 \end{pmatrix}
$$

Arreglo de coeficientes **[A]**

Arreglo de incógnitas **[x]**

Arreglo de valores conocidos **[b]**

Introducción a las Matrices

DEFINICIONES:

•Una matriz es un arreglo de números ordenados, variables o constantes, en filas horizontales y columnas verticales encerrados entre paréntesis rectangulares.

•Elemento matricial, es cada valor –constante o variable- en una matriz.

•Dimensión, es el número de filas por el número de columnas de una matriz (mxn).

•Un elemento típico en la i-ésima fila y la j-ésima columna de A se identifica como a_{ij}. Por ejemplo, en la primera matriz, a_{11}=2 y a_{32}=8.

$$1.\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \qquad 2.\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad 3.\ C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Tipos Especiales de Matrices

Matriz Columna (Vector):

Una matriz con solamente una columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada (m=n):

Una matriz con el mismo número de columnas y renglones.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal:

Matriz donde todos los elementos son cero, a excepción de la diagonal principal.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz Nula:

Matriz donde todos los elementos son cero.

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipos Especiales de Matrices

Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de la matriz **A** de mxn, escrita como $\boldsymbol{A^T}$, se obtiene al intercambiar los renglones y columnas en **A**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

Si **A**=$\boldsymbol{A^T}$, resulta que la matriz **A** es cuadrada y que a_{ij}=a_{ji}

Las matrices generadas por FEM son simétricas y en forma de bandas, por lo que utilizando un esquema de almacenaje efectivo, se pueden almacenar matrices de gran tamaño en la memoria de alta velocidad.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 7 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 9 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Suma/Resta

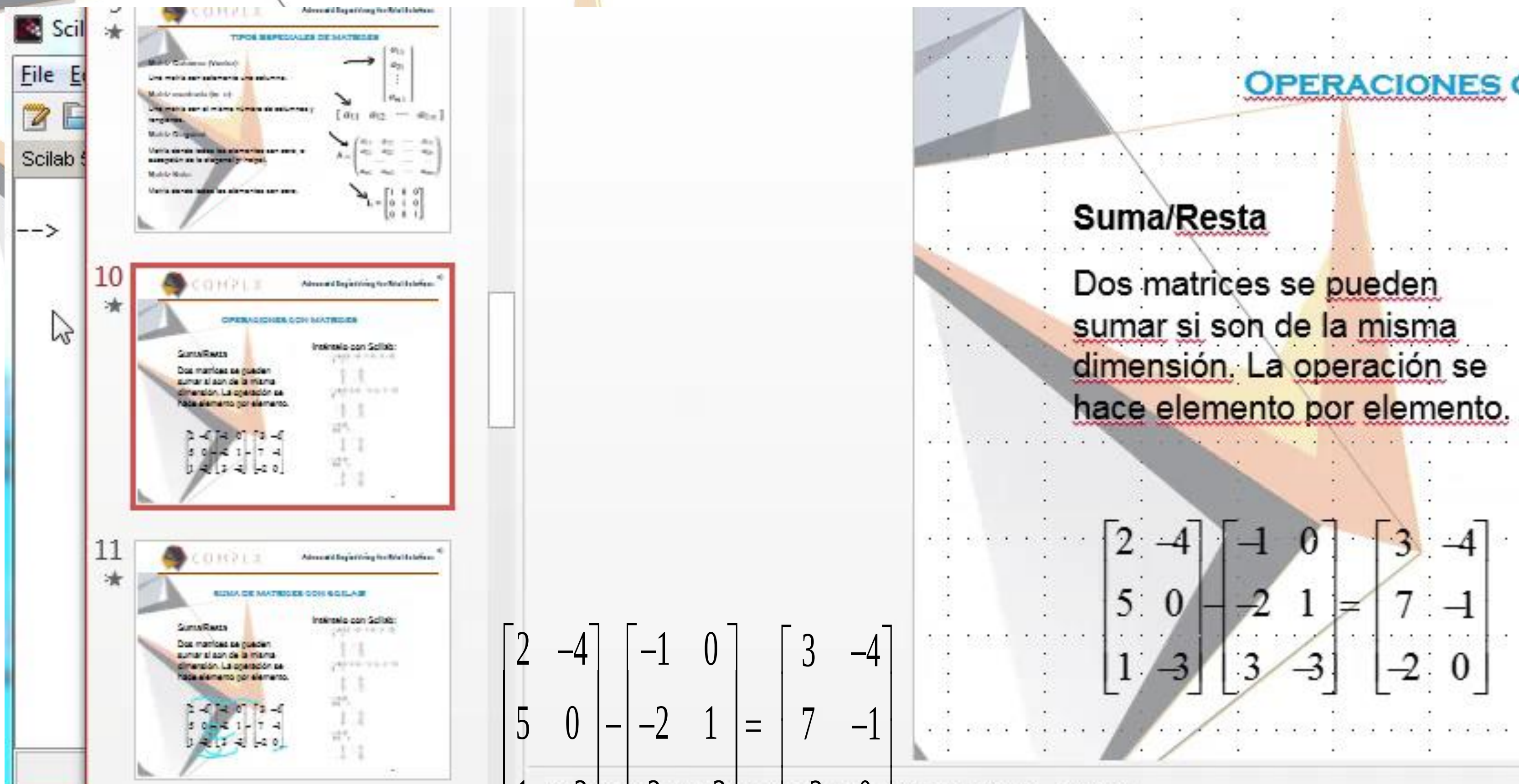
Dos matrices se pueden sumar si son de la misma dimensión. La operación se hace elemento por elemento.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Inténtelo con Scilab:

```
-->A=[2 -4; 5 0; 1 -3]
 A  =

    2.  - 4.
    5.    0.
    1.  - 3.

-->B=[-1 0; -2 1; 3 -3]
 B  =

  - 1.    0.
  - 2.    1.
    3.  - 3.

-->A+B
 ans  =

    1.  - 4.
    3.    1.
    4.  - 6.

-->A-B
 ans  =

    3.  - 4.
    7.  - 1.
  - 2.    0.
```

Operaciones con Matrices en SCILAB



$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones con Matrices (2)

Multiplicación por escalar

Se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar.

$$4\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ 20 & 0 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

Inténtelo con Scilab:

```
-->A
 A  =

    2.   - 4.
    5.     0.
    1.   - 3.

-->4.*A
 ans  =

    8.    - 16.
    20.     0.
    4.    - 12.
```

Operaciones con Matrices (3)

Multiplicación de matrices

La multiplicación matricial no es conmutativa

$$A * B \neq B * A$$

Además, sólo es posible multiplicar matrices si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B:

2 columnas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \textbf{2 renglones}$$

Multiplicación de Matrices

Sean:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}; C=A*B$$

Cada elemento C_{ij} será el producto punto de la i-esima fila de A con la j-esima columna de B. Así, el elemento C_{21} será el producto punto de la segunda fila de A con la primera columna de B.

$$C=\begin{bmatrix} A_{11}*B_{11}+A_{12}*B_{21} & A_{11}*B_{12}+A_{12}*B_{22} & A_{11}*B_{13}+A_{12}*B_{23} \\ A_{21}*B_{11}+A_{22}*B_{21} & A_{21}*B_{12}+A_{22}*B_{22} & A_{21}*B_{13}+A_{22}*B_{23} \\ A_{31}*B_{11}+A_{32}*B_{21} & A_{31}*B_{12}+A_{32}*B_{22} & A_{31}*B_{13}+A_{32}*B_{23} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Multiplique la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

3 x 2 2 x 3

3 x 3

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{2*1+3*3=11} & A_{11}*B_{12}+A_{12}*B_{22} & A_{11}*B_{13}+A_{12}*B_{23} \\ A_{21}*B_{11}+A_{22}*B_{21} & A_{21}*B_{12}+A_{22}*B_{22} & A_{21}*B_{13}+A_{22}*B_{23} \\ A_{31}*B_{11}+A_{32}*B_{21} & A_{31}*B_{12}+A_{32}*B_{22} & A_{31}*B_{13}+A_{32}*B_{23} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Multiplique la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

3 x 2 2 x 3

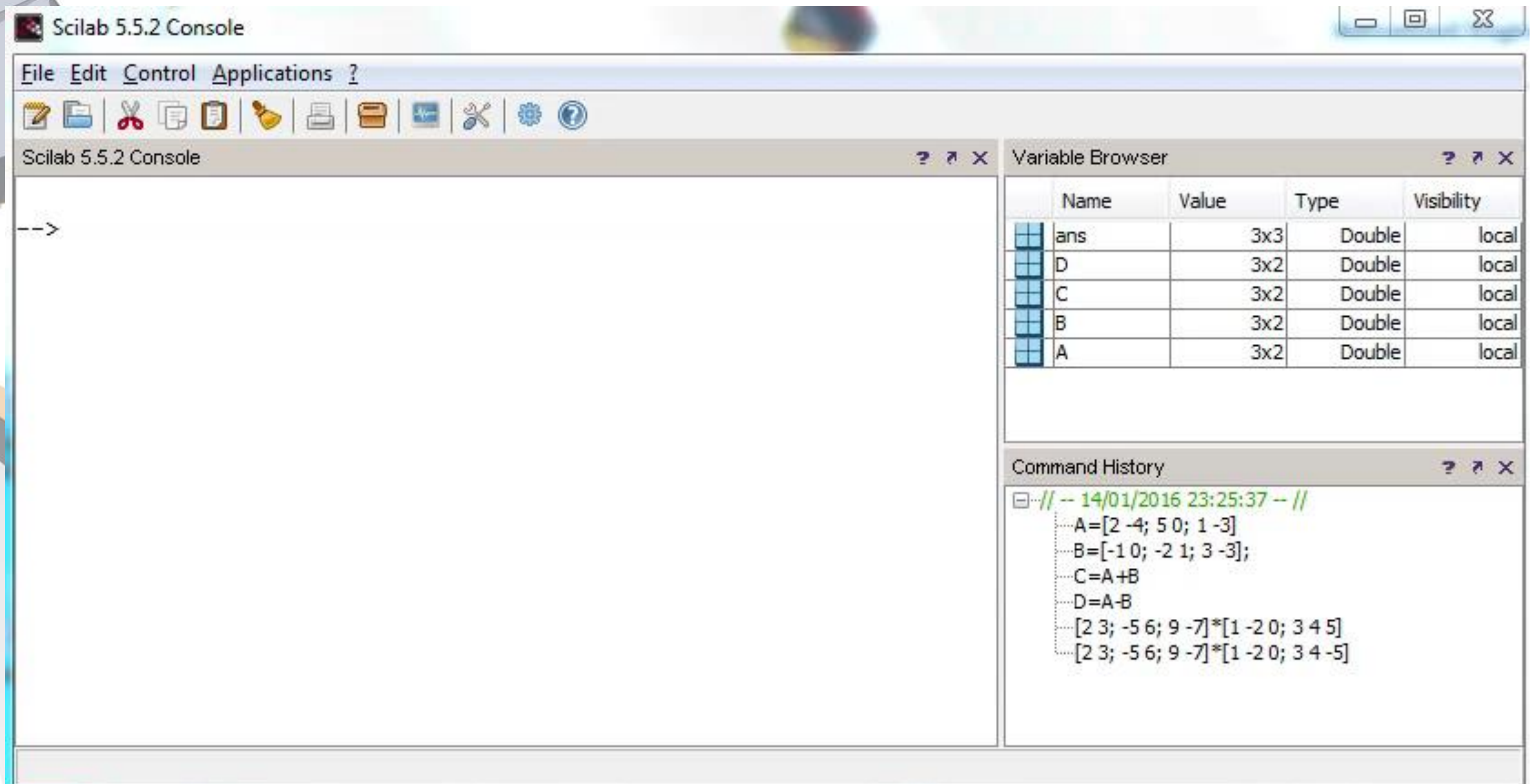
3 x 3

$$C = \begin{bmatrix} 2*1+3*3=11 & -4+12=8 & A_{11}*B_{13}+A_{12}*B_{23} \\ A_{21}*B_{11}+A_{22}*B_{21} & A_{21}*B_{12}+A_{22}*B_{22} & A_{21}*B_{13}+A_{22}*B_{23} \\ A_{31}*B_{11}+A_{32}*B_{21} & A_{31}*B_{12}+A_{32}*B_{22} & A_{31}*B_{13}+A_{32}*B_{23} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Multiplique la siguiente matriz:

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}} \bullet \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 11 & 8 & -15 \\ 13 & 34 & -30 \\ -12 & -46 & 35 \end{bmatrix}}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & -15 \\ 13 & 34 & -30 \\ -12 & -46 & 35 \end{bmatrix}$$

Inversa de una Matriz

La inversa de una matriz es aquella que multiplicada por la matriz original, da como resultado la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz identidad es una matriz (mxn) cuadrada (m=n) que contiene *unos* en los elementos de la diagonal y *ceros* en todos los demás elementos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4:

En Scilab, realice la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
-->C=[3 -1;-5 2]
 C  =

   3.  - 1.
 - 5.    2.
```

```
-->inv(C)
 ans  =

    2.    1.
    5.    3.
```

Note que el resultado no es totalmente el esperado

```
-->C*inv(C)
 ans  =

    1.  - 4.441D-16
    0.    1.
```

Ejemplo 5:

En Scilab, compruebe la siguiente operación matricial:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

For a 2×2 matrix

$$\mathsf{A} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

the matrix inverse is

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Matrices Singulares

No todas las matrices tienen inversa, a aquellas matrices no-invertibles se les denomina matrices singulares. Ejemplos de matrices singulares de 2x2 son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al intentar obtener la inversa de dichas matrices en Scilab obtendremos:

```
-->inv([1 1;1 1])
               !--error 19
Problem is singular
-->inv([1 -1;-1 1])
                 !--error 19
Problem is singular
```

Ejemplo 6: Solución de Ecuaciones Simultáneas

La solución de un sistema de ecuaciones planteado en forma matricial como A*X=B, donde X es un vector columna conteniendo a x_1, x_2, x_3, se puede obtener de la forma siguiente: X=inv(A)*B.

Ejemplo:

$$-4x_2 + 3x_3 = 29$$
$$3x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 53$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 26$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{X} & = & \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 9 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 29 \\ 53 \\ 26 \end{pmatrix} \end{array}$$

A · X = B

A^{-1} · A · X = A^{-1} · B

1 · X = A^{-1} · B

X = A^{-1} · B

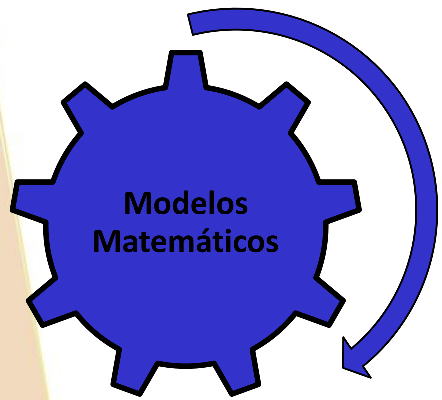
```
-->A=[0 4 3; 1 9 8; 2 5 3]
 A  =


    0.    4.    3.
    1.    9.    8.
    2.    5.    3.
-->B=[29 53 26]'
 B  =


    29.
    53.
    26.
-->x=inv(A)*B
 x  =


  - 6.7692308
    10.538462
  - 4.3846154
```

Ejercicio 1: Solución de Ecuaciones Simultáneas

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 53$$
$$3x_1 - 1x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 4x_5 = 65$$
$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 1x_4 - 5x_5 = 25$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1x_4 - 9x_5 = -7$$
$$2x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 7x_5 = -30$$

Siguiente Paso: Derivación de Matriz de Rigidez



Derivación de Matriz de Rigidez

AGRADECEMOS TU ATENCIÓN

Referencias

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2004). *El método de los elementos finitos.* Barcelona: CIMNE.

Carnegie Mellon Curriculum: introduction to CAD and CAE. (2014). Obtenido de Autodesk University: http://auworkshop.autodesk.com/library/carnegie-mellon-curriculum-introduction-cad-and-cae?language=en

Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007). (22 de Diciembre de 2014). Recuperado el 17 de Junio de 2015, de Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder: http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/

Gallegos, S., (2006). Notas del Curso de Elementos Finitos. Monterrey. ITESM.