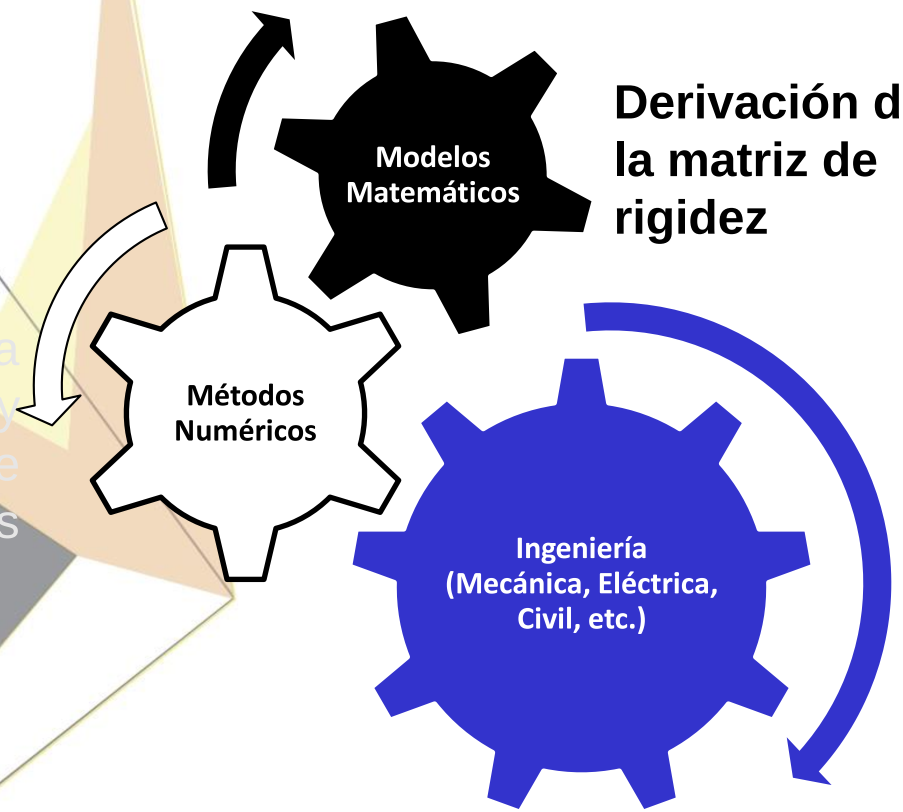
COMPLX

CURSO BÁSICO DE ELEMENTOS FINITOS

1.3 PARTE 1: ELEMENTO BARRA EN 1D

Sistema MEF

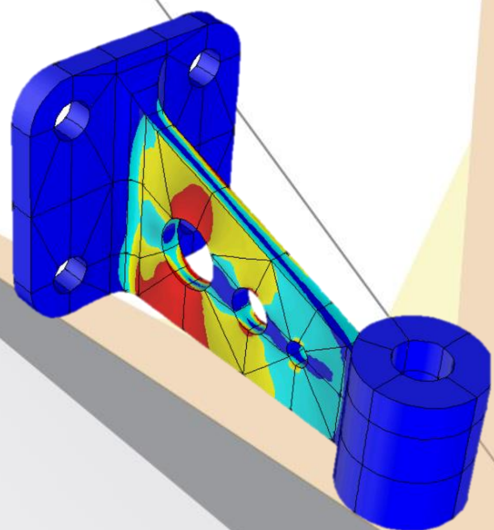
Álgebra matricial y solución de ecuaciones



Derivación de la matriz de rigidez

Mecánica de Materiales

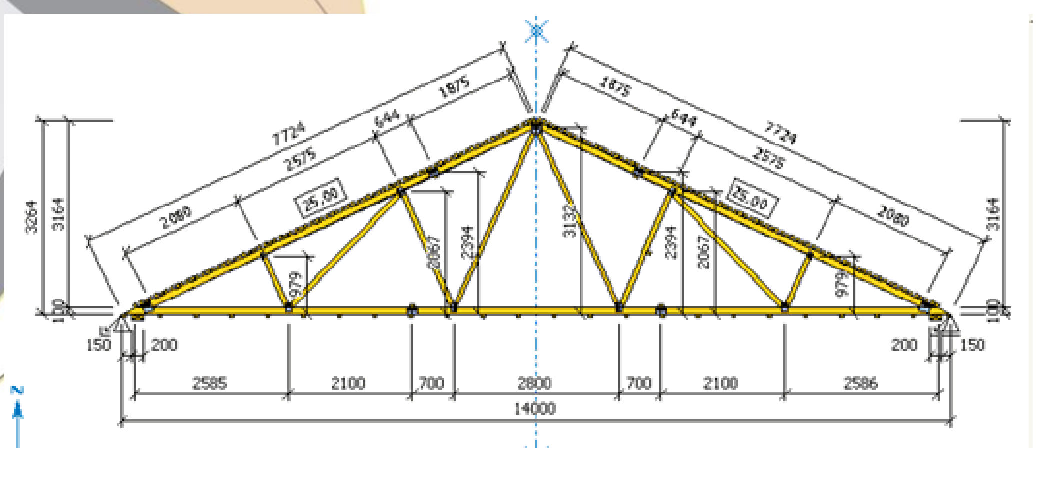
Módulo MEF 1



1. Introducción al Método de Elementos Finitos (MEF)
    a) Definición
    b) Historia
2. Conceptos básicos de álgebra lineal
    a) Sistemas de ecuaciones simultáneas y matrices
    b) Tipos especiales de matrices
    c) Operaciones con matrices
    d) Introducción a Scilab
3. **Matriz de rigidez del elemento barra (1D)**
    a) Definición del elemento barra
    b) Derivación de la matriz de rigidez
    c) Ensamble de la matriz de rigidez global
    d) Condiciones de Frontera homogéneas
    e) Solución
4. Análisis de estructuras reticulares utilizando barras bidimensionales

El Método de Rigideces

- Seguiremos el procedimiento conocido como método de rigideces; utilizado en la mayoría de los libros de MEF.
- El objetivo es obtener una relación entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos de una estructura que puede modelarse mediante líneas; como la mostrada.
- Al final del día queremos contestar las siguientes preguntas: ¿Cuál es la carga, y por consecuencia, la fuerza interna soportada por cada pieza? ¿El desplazamiento en las uniones? ¿Y las reacciones en los soportes?.



Suposiciones del Elemento Barra

1. La barra es geométricamente recta.

2. El material obedece la ley de Hooke: **F=k δ → σ=Eε**.

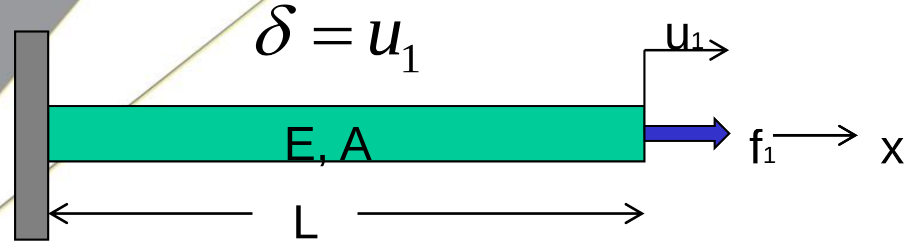
3. Las fuerzas se aplican en los extremos de la barra.

4. La barra soporta solamente fuerzas axiales. Flexión, torsión y corte no son transmitidas al elemento debido a la manera en que están conectados los elementos.

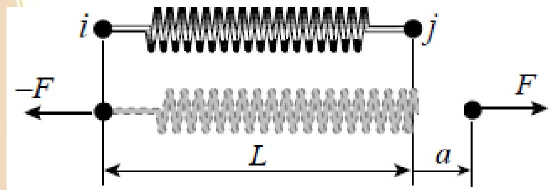
Barra Empotrada Sujeta a una Fuerza

- Considere una barra empotrada en un extremo. Se define un **sistema coordenado local *x***, alineado con el centroide de la barra, que va del extremo empotrado al extremo libre.
- Se aplica una fuerza axial $\boldsymbol{f_1}$, alineada con el eje local ***x***, en el extremo libre. El desplazamiento, $\boldsymbol{u_1}$, está restringido al mismo eje por lo que se dice que la barra tiene un sólo **grado de libertad**.
- La deformación unitaria de la barra, δ, es equivalente al movimiento del extremo libre, $\boldsymbol{u_1}$.

$$\delta = u_1$$



Rigidez del Elemento Barra (k)



Considerando el elemento barra como un resorte, la fuerza F es proporcional a la deformación de la barra (δ):

$F = k\,\delta$ (1)

Pero por la definición de esfuerzo normal sabemos que:

$\sigma = F/A$ (2)

En el rango elástico,

$\sigma = E\varepsilon$ (3)

Donde ε define la deformación unitaria (pequeñas deformaciones):

$\varepsilon = \delta/L = \Delta L/L$ (4)

Si combinamos las ecuaciones (1) a (3), obtendremos:

$k = EA/L$ (5)

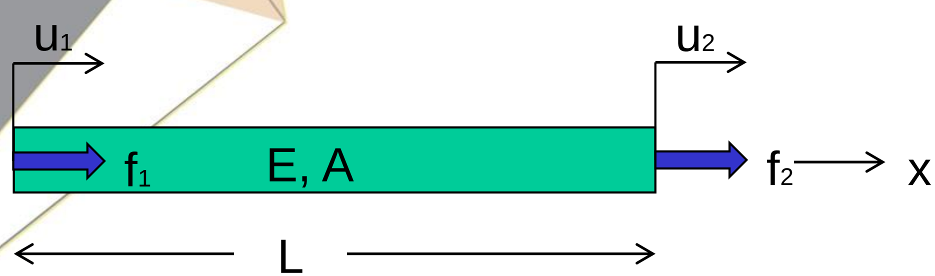
La rigidez representa la resistencia que ofrece la barra a ser deformada axialmente.

Barra Libre Sujeta a Dos Fuerzas Nodales

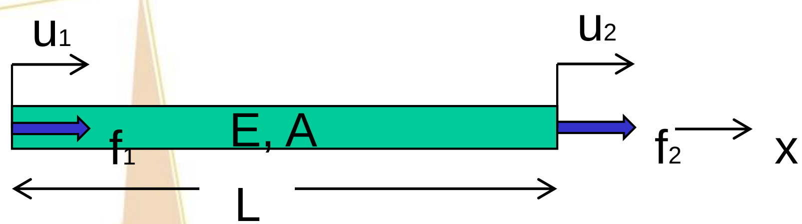
- Si regresamos a nuestro problema inicial, la solución es

$$f_1 = \frac{EA}{L} u_1$$

- Sin embargo, esta solución es limitada a barras empotradas y no permite analizar problemas como la armadura mostrada inicialmente. Se requiere entonces que los dos extremos de la barra puedan moverse.



Matriz de Rigidez de un Elemento Barra



Expresando la rigidez de la barra como k, la resultante de fuerzas en el nodo 1 produce:

$f_1 = k(u1 - u2)$. (6)

De la misma forma, en el nodo 2 tendremos:

$f_2 = k(u2 - u1)$. (7)

Entonces:

$- f_2 = k(u1 - u2) = f_1$ (8)

Escribiendo (6) y (7) en formato matricial:

Matriz de rigidez del elemento

Vector de desplazamientos

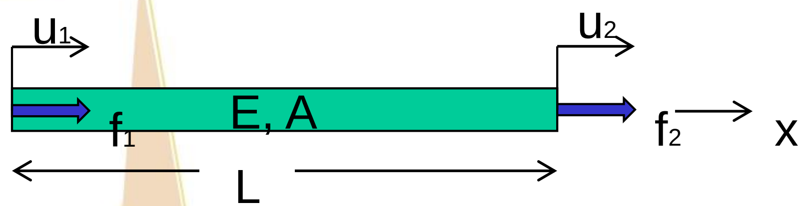
Vector de fuerza externa

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \bar{f} = \bar{k}\bar{u} \quad (9)$$

Notación Matricial

Rigidez de la barra *EA/L*

Ejemplo 1: Matriz de Rigidez de un Elemento Barra



Compruebe que las ecuaciones obtenidas para cada nodo (6, 7) son aplicables para un elemento cargado a tensión o compresión; asumiendo desplazamiento unitario en uno de los nodos.

Compresión:

$f_1 = k(1 - 0) = k$

En el nodo 2 tendremos:

$f_2 = k(0 - 1) = -k$

La fuerza en el nodo 2 va en sentido contrario al indicado en el dibujo.

Tensión:

$f_1 = k(0 - 1) = -k$

En el nodo 2 tendremos:

$f_2 = k(1 - 0) = k$

La fuerza en el nodo 1 va en sentido contrario al indicado en el dibujo.

.

ERRATA: En la grabación mencionamos direcciones, cuando debimos referirnos a sentidos

Matrices de Rigidez y Métodos para Obtenerla

Para un elemento, una matriz de rigidez *k* es una matriz que relaciona los desplazamientos nodales en coordenadas locales (u) con las fuerzas locales (f) de un solo elemento:

$$\mathbf{f = k\, u}$$

Para una estructura o medio continuo, una matriz de rigidez *K* relaciona los desplazamientos nodales en coordenadas globales (U) con las fuerzas globales (F) aplicadas al medio o estructura completa.

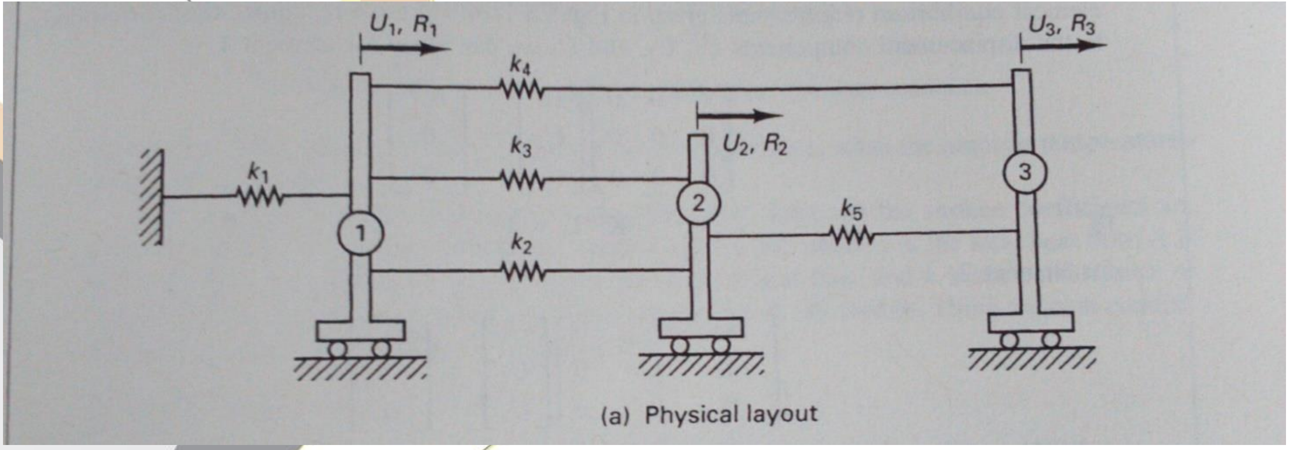
$$\mathbf{F = K\, U}$$

El método de rigideces es didáctico, pero está limitado a elementos sencillos. Métodos alternativos para obtener las matrices de rigidez de elementos 2D, 3D, placas, etc., son:

- *El método de la energía potencial mínima.*
- *Principio del trabajo virtual*
- *Método de Galerkin*

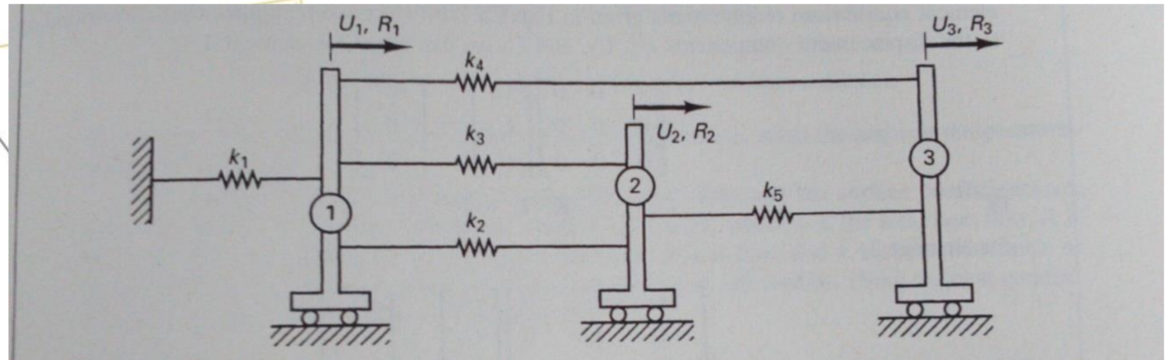
Ejemplo 2

- *Obtenga en formato matricial, la relación* $\overline{f} = \overline{k}\,\overline{u}$ *de cada elemento mostrado en la figura:*



$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 2



(a) Physical layout

<u>Elemento 1</u>

$$\begin{Bmatrix} f_4^{(1)} \\ f_1^{(1)} \end{Bmatrix} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

<u>Elemento 2</u>

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

<u>Elemento 3</u>

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

<u>Elemento 4</u>

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_3^{(4)} \end{Bmatrix} = k^{(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

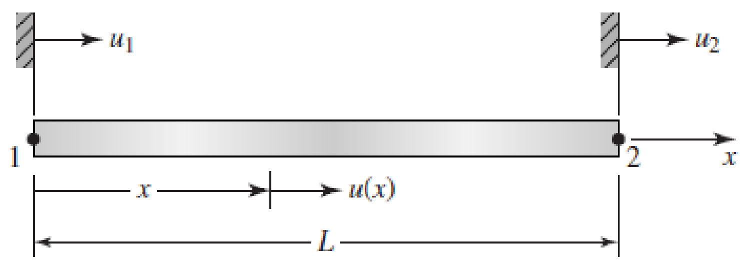
<u>Elemento 5</u>

$$\begin{Bmatrix} f_2^{(5)} \\ f_3^{(5)} \end{Bmatrix} = k^{(5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Funciones de Forma (1)

- Ya tenemos la matriz de rigidez del elemento barra. Más adelante veremos como ensamblar la contribución de cada elemento y obtener los desplazamientos del sistema.
- Antes, es importante escoger una función para representar la deformación a lo largo del elemento. A esa función se le denomina <u>función de forma</u> y comúnmente es polinomial. Para el elemento barra: $u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$

$$N_1(0) = 1 \qquad N_2(0) = 0$$
$$N_1(L) = 0 \qquad N_2(L) = 1$$



- En general, el número total de coeficientes en una función de forma es igual al número total de grados de libertad asociados con el elemento. En este caso tenemos dos grados de libertad, así que propondremos las siguientes funciones:

$$N_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$N_2(x) = b_0 + b_1 x$$

Funciones de Forma (2)

- x, es la posición en el eje del elemento y puede ir de 0 a L. Necesitamos dos polinomios que cumplan con lo siguiente:

N_1 es la función de forma del desplazamiento 1 y debe valer 1 en x=0 (nodo 1) y 0 en x=L (nodo 2).

$$N_1(0) = 1 = a_0 + a_1(0); a_0 = 1$$

$$N_1(L) = 0 = 1 + a_1(L); a_1 = -\frac{1}{L}$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad (10)$$

N_2 es la función de forma del desplazamiento 2 y debe valer 0 en x=0 (nodo 1) y 1 en x=L (nodo 2).

$$N_2(0) = 0 = b_0 + b_1(0); b_0 = 0$$

$$N_2(L) = 1 = b_1(L); b_1 = \frac{1}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L} \qquad (11)$$

Finalmente, el desplazamiento a lo largo del elemento barra es:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \left(\frac{x}{L}\right)u_2 \qquad (12)$$

Ejemplo 3: Funciones de Forma

Calcule el desplazamiento de la posición media (L/2) de un elemento barra con los siguientes desplazamientos nodales:
u_1=-1, u_2=1.

$$u(x)=\left(1-\frac{x}{L}\right)u_1+\left(\frac{x}{L}\right)u_2$$

$$u(L/2)=(-1)\left(1-\frac{L}{2L}\right)+(1)\left(\frac{L}{2L}\right)=0$$

Ensamble de un Sistema en Coordenadas Globales

Sistema de dos resortes con el numero de nodo, numero de elemento, desplazamientos nodales y fuerzas nodales positivas

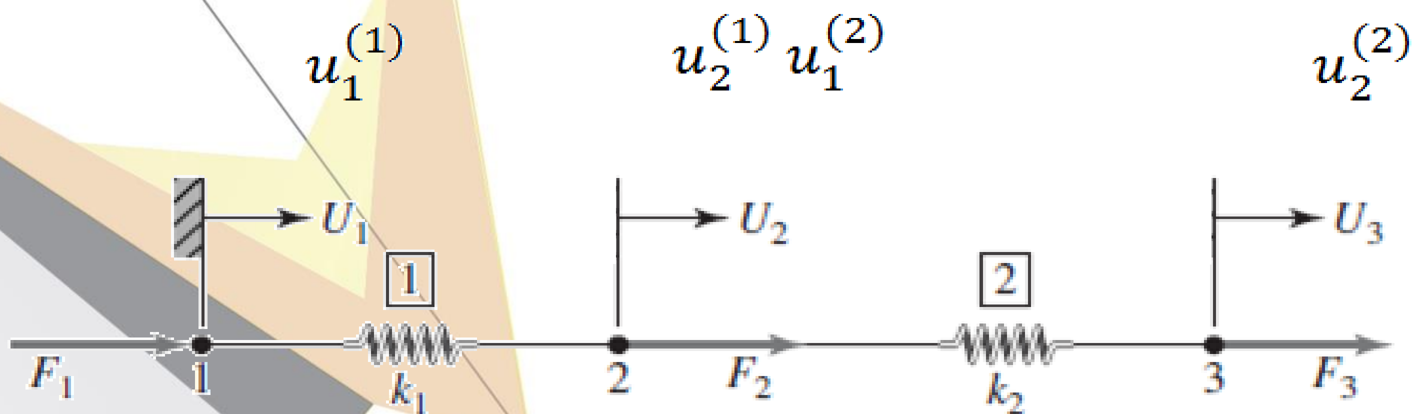
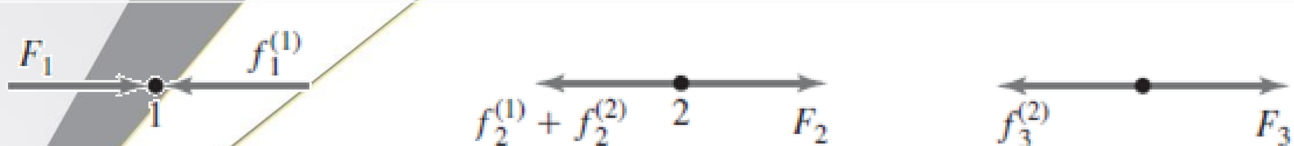


Diagrama de cuerpo libre de cada nodo:



Ensamble de los Elementos (Equilibrio y Continuidad)

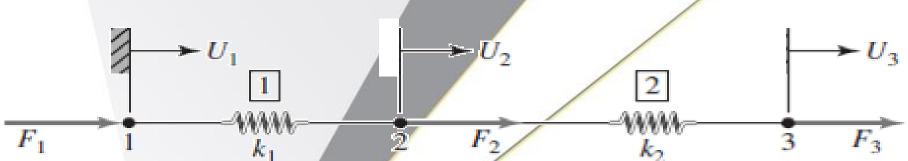
Expresamos la condición de equilibrio para cada resorte

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Para empezar a ensamblar las matrices es necesario establecer las condiciones de continuidad que relacionan los desplazamientos de los dos resortes:

$$u_1^{(1)} = U_1 \qquad u_2^{(1)} = U_2 \qquad u_1^{(2)} = U_2 \qquad u_2^{(2)} = U_3$$



$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Ensamble de los Elementos (Balance de Fuerzas)

Expandimos ambas matrices a un tamaño 3x3 (donde el elemento 1 no esta conectado al nodo 3 y el elemento 2 no esta conectado al nodo 1)

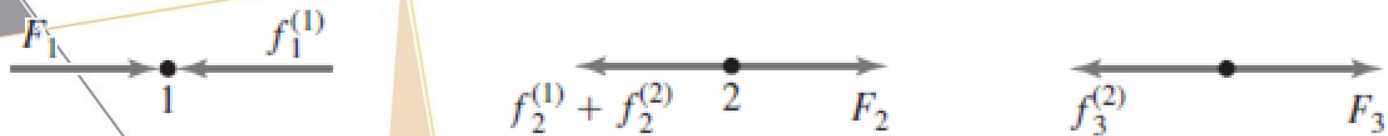
$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Ensamblamos las matrices anteriores, sumando ecuaciones (17) + (18):

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Reducción de Ecuaciones



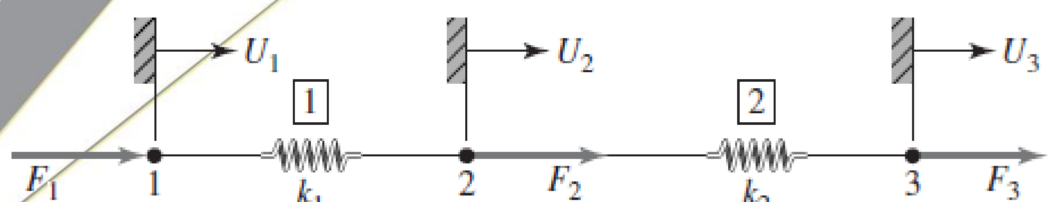
De las condiciones de equilibrio en los nodos 1,2 y 3 se obtiene que:

$$f_1^{(1)} = F_1 \qquad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = F_2 \qquad f_3^{(2)} = F_3$$

Reemplazando nos queda:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$



F=KU

Matriz de rigidez global o del sistema

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \boxed{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}} = \boxed{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}}$$

Matriz global
de fuerzas

Vector de
desplazamientos
globales

Siguiente paso...

A partir de la matriz F=KU, aplicar condiciones de frontera y resolver el sistema de ecuaciones para obtener los desplazamientos en cada nodo.

GRACIAS POR TU ATENCIÓN!

Referencias

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2004). *El método de los elementos finitos.* Barcelona: CIMNE.

Carnegie Mellon Curriculum: introduction to CAD and CAE. (2014). Obtenido de Autodesk University: http://auworkshop.autodesk.com/library/carnegie-mellon-curriculum-introduction-cad-and-cae?language=en

Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007). (22 de Diciembre de 2014). Recuperado el 17 de Junio de 2015, de Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder: http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/

Gallegos, S., (2006). Notas del Curso de Elementos Finitos. Monterrey. ITESM.